广西民族大学
GUANGXI MINZU UNIVERSITY



线性代数
Linear Algebra

第十二讲 · 向量组的线性相关性

人工智能学院 · 26计科03班、04班

主讲：郭泉

上讲回顾：向量组等价的秩判据



$\boldsymbol{B}$由$\boldsymbol{A}$表示 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}$由$\boldsymbol{B}$表示 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

把两个单向条件同时成立写在一起，就得到互相表示的判据。

原例：先判断B能否由A表示



把两组列向量记为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$、$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}_1\leftrightarrow\mathrm{R}_3;\quad \mathrm{R}_2\leftarrow\mathrm{R}_2-\mathrm{R}_1;\quad \mathrm{R}_3\leftarrow\mathrm{R}_3-\mathrm{R}_2$$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\rightarrow\left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

行最简形中，左块与整个拼接矩阵均有2个非零行。

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$，所以 $\boldsymbol{B}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 表示。

教材：第4章 §1 向量组及其线性组合，pp.82—88

原例：换序后判断A能否由B表示



把 $\boldsymbol{B}$ 放在左边，对 $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$ 再作一次初等行变换。

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{R}_1\leftrightarrow\mathrm{R}_3;\quad \mathrm{R}_3\leftarrow\mathrm{R}_3+\mathrm{R}_1;\quad \mathrm{R}_3\leftarrow\mathrm{R}_3-\mathrm{R}_2$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

这是阶梯形：$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=2$，故 $\boldsymbol{A}$ 能由 $\boldsymbol{B}$ 表示。

结合前页，两个方向分别成立，所以这两个向量组等价。

线性表示使矩阵秩不增



若 $\boldsymbol{B}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 表示，矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的秩有什么大小关系?

回顾：$\boldsymbol{B}$ 的每一列都能由 $\boldsymbol{A}$ 的列表示，可写成：

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AK}$$

调用此前学过的矩阵乘积秩不等式：

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{AK}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$$

因此，$\boldsymbol{B}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 表示时，必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$。

这只是必要条件；仅有秩不等式不能推出可表示。

表示全部单位坐标向量



给定有 n 行的矩阵 $\boldsymbol{A}$：它的列向量何时能表示全部单位坐标向量？

把它们拼成单位阵 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}$。问题就是：是否存在 $\boldsymbol{K}$，使 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}$？

按线性表示的秩判据，要判断是否有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{n}})$。

$$\mathrm{n} = \mathrm{r}(\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}) \leq \mathrm{n}$$

拼接矩阵包含单位阵，秩至少为 n；它只有 n 行，秩至多为 n。

因此，能表示全部单位坐标向量 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{n}$。

线性表示的小结



$\boldsymbol{b}$由$\boldsymbol{A}$表示 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax = b}$有解

$\boldsymbol{B}$由$\boldsymbol{A}$表示 $\Leftrightarrow$ 存在$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{B = AK}$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

到这里回答的是“能否表示”。下一个问题是：这种表示里有没有冗余？

§2 向量组的线性相关性



一、向量组的线性相关性

二、线性相关性的判定

三、相关结论

教材 *pp*.87—91 · 定义4、定理4—5、例4—7

零向量的表示



为判断向量组中有没有冗余，先研究：零向量可以怎样表示?

$$0 = 0\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_m$$

任何向量组都能用全零系数表示零向量。

因此，“零向量能否被表示”没有区分度。

真正的问题：能否找到不全为零的系数?

一个可以删去向量的例子



$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 = 0$$

系数 $(1,1,-1)$ 不全为零，却得到零向量。

把式子移项：$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$。第三个向量已能由前两个表示。

线性相关与线性无关



$$k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = 0$$

存在不全为零的系数：向量组线性相关。

只能取 $k_1 = \cdots = k_m = 0$：向量组线性无关。

一组向量或相关，或无关，两者必居其一。

边界情形：一个向量



只含一个向量 $\boldsymbol{a}$ 的组，什么时候相关，什么时候无关？

$$k\boldsymbol{a} = 0$$

$\boldsymbol{a} = 0$ 时，可取 $k = 1$，因此单个零向量线性相关。

$\boldsymbol{a} \neq 0$ 时，只有 $k = 0$，因此单个非零向量线性无关。

两个向量的几何直觉



$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$相关 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1 = \lambda \boldsymbol{a}_2$或$\boldsymbol{a}_2 = \mu \boldsymbol{a}_1$

两个非零向量相关，就是它们方向共线。

若其中包含零向量，整个向量组也必然相关。

“分量对应成比例”是两向量情形的特别判定，不要推广成多向量算法。

相关性的表示语言



相关能否改写成“某个向量由其余向量表示”？当 $m \geq 2$ 时，向量组相关当且仅当：

至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示。

$$k_j \boldsymbol{a}_j = -\sum_{i \neq j} k_i \boldsymbol{a}_i, \qquad k_j \neq 0$$

不全为零的系数中总能选到一个非零系数，于是可以把对应向量解出来。

相关性的方程语言



寻找不全为零的系数，能否直接用已学的齐次方程组算法?

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_m)$$

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax} = 0$$

线性相关 当且仅当齐次方程 $\boldsymbol{Ax} = 0$ 有非零解。

线性无关 当且仅当 $\boldsymbol{Ax} = 0$ 只有零解。

相关性的秩语言



将 m 个向量按列拼成 $\boldsymbol{A}$。上一页的“有无非零解”，怎样写成秩条件?

线性相关 $\Leftrightarrow \ \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < m$

线性无关 $\Leftrightarrow \ \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$

比较的是“秩”与“向量个数”，不是秩与向量的维数。

三个三维向量：算式与几何对照



设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 是三阶方阵。先沿刚建立的判据判断：

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$

线性相关 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<3$ $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}|=0$

再联系行列式的体积解释：体积为零。

三个向量从同一原点出发，落在某个过原点的平面内；
共线、含零向量也包括在这种情形中。

几何是对计算结果的解释；判断依据仍是上面的方程与秩。

线性相关的四种判定对齐



组合：存在不全为零的系数，线性组合得到0。

方程：$\boldsymbol{Ax}=0$有非零解。

秩：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<m$，$m$为向量个数。

表示：至少一个向量可由其余向量表示。

四种语言完全等价，选择最方便计算的一种。

线性无关的四种等价表述



$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m), \quad m \geq 2$

$k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_m = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax} = 0$只有零解 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$

⇔ 任何一个向量都不能由其余向量线性表示。

“没有任何一个”与相关判据中的“至少有一个”正好相反。

例4：单位坐标向量组



单位坐标向量组能表示任意 n 维向量；它们自身是否线性无关?

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{r}(\boldsymbol{E}) = n =$向量个数

因此 n 维单位坐标向量组线性无关。

单位坐标组的逐分量证明



上一页用秩判定了无关。现在只用定义证明：令零组合成立，比较各分量。

$$k_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = 0$$

$$(k_1, \ldots, k_n)^{\mathrm{T}} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\Rightarrow\ k_1 = \cdots = k_n = 0$$

每个分量逐一比较，直接得到全部系数为零。

原例5：整体相关而部分无关



将 $\boldsymbol{A}$ 的三列记为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$。判断全组是否相关、前两个向量是否无关。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 < 3, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 2$$

随堂选择题1：线性相关



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

下列结论正确的是：

A. $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关

B. $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关

C. $\boldsymbol{a}_3$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性表示

D. $\boldsymbol{Ax}=0$ 只有零解

随堂选择题1：解析



$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$

正确答案C：第三列是前两列的和。

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$，所以$\boldsymbol{Ax} = 0$有非零解

同时 $\mathrm{r}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 2$，所以前两个向量无关。

例6：先按定义证明新的向量组无关



已知 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，构造：

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1$$

要判断 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 是否无关，沿刚学过的定义做：

$$\mathrm{t}_1\boldsymbol{b}_1 + \mathrm{t}_2\boldsymbol{b}_2 + \mathrm{t}_3\boldsymbol{b}_3 = 0$$

把三个 $\boldsymbol{b}$ 的表达式代入，按 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 收集系数。

例6：展开零组合，逐个求出系数



$$t_1\boldsymbol{b}_1 + t_2\boldsymbol{b}_2 + t_3\boldsymbol{b}_3 = 0$$

$$(t_1 + t_3)\boldsymbol{a}_1 + (t_1 + t_2)\boldsymbol{a}_2 + (t_2 + t_3)\boldsymbol{a}_3 = 0$$

由已知的 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 无关，三个系数必须分别为零：

$$\begin{cases} t_1 + t_3 = 0 \\ t_1 + t_2 = 0 \\ t_2 + t_3 = 0 \end{cases}$$

前两式得 $t_2 = t_3$；再由第三式得 $t_2 = t_3 = 0$，进而 $t_1 = 0$。

零组合只有全零系数，因此 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 线性无关。

例6：同一证明的矩阵写法



记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$、$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$；刚才的系数方程就是 $\boldsymbol{Kx}=0$。

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK},\quad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad |\boldsymbol{K}|=2\neq 0$$

$\boldsymbol{K}$ 可逆；将已经完成的零组合证明写短一些：

$$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Kx})=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{Kx}=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}=0$$

也可用此前的矩阵秩性质核验同一结论：

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AK})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$$

部分与整体：在原零组合里补零系数



例5中整体相关而部分无关。反过来，部分组已相关，加入更多向量后呢?

设前 k 个向量相关，则有不全为零的系数，使：

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = 0$$

把它放回整个向量组，后面各向量的系数都取零：

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k + 0\boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_m = 0$$

系数仍不全为零，所以部分相关 ⇒ 整体相关。

取逆否命题：整体无关 ⇒ 任意部分组无关。

部分与整体：再用矩阵秩核验



同一结论也可用已学的矩阵秩不等式证明。

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}),\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{k}})$$

若部分组 $\boldsymbol{B}$ 相关，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})<\mathrm{k}$；每添一列，秩至多增加1。

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\le \mathrm{r}(\boldsymbol{B})+(\mathrm{m}-\mathrm{k})<\mathrm{m}$$

由秩小于列数，再次得到整个向量组相关。

反向不成立：整体相关，部分仍可无关，见前面的例5。

向量个数超过维数



有 m 个 n 维向量。若 m > n，能否不消元，就判断它们必然相关?

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leq n < m$$

因此$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < m$

结论：向量个数多于维数时，向量组必然线性相关。

无关组添一个向量：检查新向量的系数



已知 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_\mathrm{m})$ 无关。要证明：

加入 $\boldsymbol{b}$ 后相关 ⇔ $\boldsymbol{b}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 表示。

$$\mathrm{k}_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \mathrm{k}_\mathrm{m}\boldsymbol{a}_\mathrm{m} + \mathrm{t}\boldsymbol{b} = 0$$

若加入后相关，可取不全为零的系数。若 $\mathrm{t} = 0$，由原组无关，所有 k_i 也只能为零，矛盾。因此 $\mathrm{t} \neq 0$，可以解出 $\boldsymbol{b}$。

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{c}_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \mathrm{c}_\mathrm{m}\boldsymbol{a}_\mathrm{m}$$

反向：将表示式移项，$\boldsymbol{b}$ 的系数为 -1，便得到系数不全为零的零组合。

添向量结论：用矩阵秩再核验



上一页已从定义证明；下面用已学秩判据核验。

$\boldsymbol{A}$ 有 m 列且无关，加入 $\boldsymbol{b}$ 后相关，因此：

$$\mathrm{m} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) < \mathrm{m} + 1$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{m}$$

按线性表示的秩判据，$\boldsymbol{b}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 表示。

表示系数为什么唯一？下一页直接比较两个表示式。

表示的唯一性



已知 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}$ 无关且能表示 $\boldsymbol{b}$。系数会有两套吗？假设有两种表示：

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m$$

$$\boldsymbol{b} = \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \mu_m \boldsymbol{a}_m$$

$$(\lambda_1 - \mu_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (\lambda_m - \mu_m)\boldsymbol{a}_m = 0$$

若 $\boldsymbol{A}$ 线性无关，则所有 $\lambda_i - \mu_i = 0$。因此由无关组给出的表示必然唯一。

例7：相关、无关与表示



已知 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 相关，$\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 无关。证明：
① $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 表示；② $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 表示。
先证明①：

因为 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 是无关组的子组，所以 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 无关。

而 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 相关，因此 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示。

这类证明的关键是选对“无关子组+加入后相关”的结构。

例7：反证的传递链



继续证明②：$\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 表示。若反过来假设能表示，会怎样?

假设 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示。

又因为 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 表示，代入后得：

$\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性表示。

这与 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关矛盾。因此原假设不成立。

含参四向量：求相关与无关的参数范围



将四个四维向量按列拼成矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & \mathrm{p} & \mathrm{p}+1\end{bmatrix}$$

求参数 p 的取值，使列向量组分别线性相关、线性无关。

先选用已学的判定方法，再开始计算。

教材：第4章 §2 向量组的线性相关性，pp.88—92

含参四向量：先选择判定方法



令A的四列为给定的四个四维向量，求参数p的范围。

列向量组相关 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$有非零解

$$\Leftrightarrow \mathrm{r}(A)<4 \Leftrightarrow |A|=0$$

这是方阵，行列式可直接判定是否满秩。

非方阵仍用消元与秩，不能直接套用行列式。

含参例：先消元，再记录换行符号



$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & p+2 & p+1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}_2 \leftarrow \mathrm{R}_2 - 2\mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_3 \leftarrow \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_4 \leftarrow \mathrm{R}_4 + \mathrm{R}_1$$

三次倍加不改变行列式；下一步交换第2、3行。

含参例：化为三角形后分类



$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2p+1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}_2 \leftrightarrow \mathrm{R}_3;\ \ \mathrm{R}_4 \leftarrow \mathrm{R}_4 - 2\mathrm{R}_2;\ \ \mathrm{R}_4 \leftarrow \mathrm{R}_4 + (p+4)\mathrm{R}_3$$

$$|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{U}| = 2p+1$$

$p=-1/2$时相关；$p\neq -1/2$时无关

无关组的唯一表示



设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 如下。判断三列是否无关，并求 $\boldsymbol{b}$ 由它们表示的系数。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 7\end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{A}|=7\neq 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$无关

先判定前三列无关，再求$\boldsymbol{b}$的唯一表示。

加入 $\boldsymbol{b}$ 后是四个三维向量，必相关；表示系数仍唯一。

唯一表示：先列方程，再选已学算法



$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = -3 \\ x_1 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

本例 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，前页已算得 $|\boldsymbol{A}| = 7 \neq 0$。

所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解。

这里选用已学的克拉默法则求系数，最后代回原表示式。

一般无关组只保证：若能表示，表示系数唯一。

用克拉默法则求表示系数



$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{vmatrix}=7 \qquad D_1=\begin{vmatrix}2&1&1\\-3&2&0\\7&0&3\end{vmatrix}=7$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&-3&0\\1&7&3\end{vmatrix}=-7 \qquad D_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&2&-3\\1&0&7\end{vmatrix}=14$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=2$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3$$

删去部分分量判无关



无论矩阵中的字母取何值，证明三个列向量始终线性无关。哪些分量足够用?

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

取第2、3、5行，得到三阶子式。

$$D=-1\neq 0 \Rightarrow \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$$

删分量判据的推理方向



上一页只看部分分量便判原组无关，为什么可靠？从原向量的零组合证明。

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 = 0$$

只看保留的分量，仍得到同一组系数的零组合。

保留分量组成的向量组无关，所以全部系数都为零。

因此原组无关。反向不成立：原组无关，删分量后可能相关。

$\boldsymbol{e}_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$；删第二分量后为$1$与$0$

两个问题的统一判定



能否表示

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$$

是否冗余

$$\boldsymbol{Ax} = 0$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < m$$

实际计算都回到增广矩阵、阶梯形与秩。