广西民族大学
GUANGXI MINZU UNIVERSITY



线性代数
Linear Algebra

第十一讲 · 向量组及其线性组合

人工智能学院 · 26计科03班、04班

主讲：郭泉

第三板块回望：可逆与满秩



$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆 $\Leftrightarrow \mathrm{r}(A) = n$

对任意b，$Ax = b$有唯一解

上一板块关心方阵整体是否能恢复。

现在转向：组成 A 的各列，是否重复表达了同一些方向？

从矩阵的列看乘法



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ax} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$$

第三讲已经见过：矩阵乘向量，就是对各列做线性组合。

同一个目标，三种表述



向量语言

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m$$

方程语言

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

秩的语言

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$$

不是三个新问题，而是同一个问题的三种写法。

第四板块：空间的同与不同



不同的向量列表，可能表示出同一批向量。

同一个目标向量，可能有不同的表示方式。

本章要分清：哪些方向真正独立，哪些只是重复表达。

第四章知识导航



§1 向量组及其线性组合

§2 向量组的线性相关性

§3 向量组的秩

§4 向量空间

§5 线性方程组的解的结构

§1 向量组及其线性组合



一、基本概念

二、矩阵与向量组

三、向量组的线性组合

四、向量组之间线性表示的判断法

教材 *pp*.82—87 · 定义1—3、定理1—3、例1—3

n维向量



$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

有次序的 n 个数，组成一个 n 维列向量。

默认讨论实向量；未特别说明时，向量都写成列向量。

向量的维数是分量个数，不是向量组中向量的个数。

实向量、复向量与行列约定



分量全为实数，称实向量；分量为复数，称复向量。

本课程默认讨论实向量；未指明时，向量默认写成列向量。

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = (a_1, \dots, a_n)$$

行向量与列向量是不同的向量；转置把二者联系起来。

向量集合：从 R^3 到 R^n



$$\mathrm{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_i \in \mathrm{R}\}$$

R^3 包含所有三维实向量；R^n 包含所有 n 维实向量。

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

一个齐次线性方程的全部解，也是一个可以很大、甚至无限的向量集合。

向量组



$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$

若干个同维列向量（或同维行向量）组成一个向量组。

有限有序向量组与一个矩阵的列一一对应。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_m)$$

向量组：一个有限的例子



$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

三个三维列向量，组成一个有限向量组。

“向量个数”与“每个向量的维数”是两个不同的量。

方程解集也可以看成向量组



$$\boldsymbol{Ax} = 0$$

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$，齐次方程有无穷多个解向量。

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{\xi}_k$$

所有解向量放在一起，就是一个无限向量组。本讲只识别它，解空间的结构放到§4.5。

向量组也可以包含无穷多个向量



$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1, c_2 \in \mathrm{R}$$

让两个参数遍取实数，得到无穷多个四维列向量。

有限向量组与矩阵



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}_2=(0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}_3=(1,1)^{\mathrm{T}}$$

行数告诉我们向量的维数；列数告诉我们向量的个数。

后面谈相关性时，“向量个数”会直接出现在秩的判定中。

同一矩阵的行、列两种读法



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

列组：4个三维列向量；行组：3个四维行向量。

有序向量组：次序不能省略



$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

交换前两列后，一般不再是原矩阵。

当前两列不同，交换后不相等；两列相同则不变。

线性组合



$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m$$

系数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 可以取任意实数。

线性组合不是新的运算：它就是数乘和向量加法的组合。

$$\boldsymbol{Ax} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m$$

单位坐标向量



$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$$

在标准坐标向量下，线性组合的系数就是向量的分量。

原数值例：用单位坐标向量表示



$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3$$

2、3、7是线性组合的系数，也是该向量的三个分量。

一般 n 维向量的单位坐标表示



$$\boldsymbol{E}_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}} = b_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$$

n 维单位坐标向量有 n 个，每个向量有 n 个分量。

系数就是目标向量在标准坐标下的各个分量。

线性表示



$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m$$

若存在这样的系数，称 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性表示。

问题不是“能否把式子写出来”，而是系数是否存在。

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

方程组的一般形式



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$化为阶梯形，判断有无矛盾行

原数值例：同一个方程组的三种写法



$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

方程组有解 ⇔ 右端向量能由三个列向量线性表示。

线性表示与秩



$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{A}$线性表示

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$有解

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$

这一判定没有增加新算法：还是把增广矩阵化为阶梯形。

原例1：向量的线性表示



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

证明 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量表示，并求全部表示式。

解$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$，仍用已掌握的初等行变换

原例1：消元与参数表示



$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_1 = 2 - 3c,\ \ x_2 = 2c - 1,\ \ x_3 = c$$

$$\boldsymbol{b} = (2 - 3c)\boldsymbol{a}_1 + (2c - 1)\boldsymbol{a}_2 + c\boldsymbol{a}_3$$

随堂选择题1：线性表示



$\boldsymbol{b}$能由向量组$\boldsymbol{A}$线性表示的充要条件是

A. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$

B. $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ =向量个数

C. $|\boldsymbol{A}| \neq 0$

D. $\boldsymbol{Ax} = 0$只有零解

请打开学习通完成作答。

随堂选择题1：解析



$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{A}$表示 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$

B、D判定的是列向量是否无关；C只适用于方阵。

正确答案：A。

向量组之间的线性表示



$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$　　$\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$

若 $\boldsymbol{B}$ 中每个向量都能由 $\boldsymbol{A}$ 线性表示，称 $\boldsymbol{B}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 线性表示。

$$\boldsymbol{b}_j = k_{1j}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_{mj}\boldsymbol{a}_m \quad (j = 1, \ldots, l)$$

现在要同时解决 l 个线性表示问题。

多个线性表示合并为矩阵等式



$$\boldsymbol{B = AK}$$

$\boldsymbol{K}$ 的第 j 列，记录 $\boldsymbol{b}_j$ 由 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示的系数。

向量组 $\boldsymbol{B}$ 能由 $\boldsymbol{A}$ 线性表示 当且仅当存在系数矩阵 $\boldsymbol{K}$。

$\boldsymbol{AX = B}$有解

系数矩阵逐列展开



$$\boldsymbol{b}_j = k_{1j}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_{mj}\boldsymbol{a}_m,\ \ j = 1, \ldots, l$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{K}$$

教材：第4章 §1 向量组及其线性组合，pp.82—88

矩阵乘法再识别：左行右列



$$C = AB$$

C 的列向量由 A 的列向量线性表示，系数在右边的 B 中。

C 的行向量由 B 的行向量线性表示，系数在左边的 A 中。

口诀：左行右列。

矩阵乘法的列与行展开



$$C = AB, \quad B = (b_1, \dots, b_n)$$

$$C = (Ab_1, \dots, Ab_n)$$

每个 Ab_j 都是 A 的列向量的线性组合。

行视角：C的第i行，是B各行的线性组合；系数取自A的第i行。

列视角读右矩阵的系数；行视角读左矩阵的系数。

从分块乘法读出线性表示



$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB},\ \ \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_l),\ \ \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$$

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{Ab}_1,\ldots,\boldsymbol{Ab}_n)$$

$\boldsymbol{C}$的第j列$=b_{1j}\boldsymbol{a}_1+\cdots+b_{lj}\boldsymbol{a}_l$

$\boldsymbol{C}$的第i行$=a_{i1}\boldsymbol{\beta}_1{}^{\mathrm{T}}+\cdots+a_{il}\boldsymbol{\beta}_l{}^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{\beta}_i{}^{\mathrm{T}}$表示$\boldsymbol{B}$的第$i$行；左行右列仍是系数放在左边。

向量组的等价



若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 能互相线性表示，称两个向量组等价。

$$\boldsymbol{B = AK}, \qquad \boldsymbol{A = BL}$$

“等价”不要求向量个数相同，也不要求向量按位置相等。

它只说：两组向量能表示出的向量完全相同。

列变换与列向量组



$AP = B$，　　P可逆

初等列变换等价于在右边乘一个可逆初等矩阵。

B能由A表示，　　$A = BP^{-1}$

因此：初等列变换保持列向量组的等价。

行变换与行向量组



$\boldsymbol{PA = B}$，　　$\boldsymbol{P}$可逆

初等行变换等价于在左边乘一个可逆初等矩阵。

$\boldsymbol{B}$的行由$\boldsymbol{A}$的行表示，　　$\boldsymbol{A = P^{-1}B}$

因此：初等行变换保持行向量组的等价。不能把“行”与“列”对换。

向量组等价的秩判定



$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价

$$\Leftrightarrow \ \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$$

单向表示只需要 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$；互相表示还要保证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 不更小。

不同的向量列表，可以有相同的表示能力。

等价的秩判据证明



$\boldsymbol{B}$由$\boldsymbol{A}$表示 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}$由$\boldsymbol{B}$表示 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

把两个单向条件同时成立写在一起，就得到互相表示的判据。