广西民族大学
GUANGXI MINZU UNIVERSITY



线性代数
Linear Algebra

第十讲 · 行列式的结构与应用

人工智能学院 · 26计科03班、04班

主讲：郭泉

上讲回顾：三阶行列式的展开



$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

$$D = 0\cdot A_{21} + (-1)A_{22} + 4A_{23}$$

$$= (-1)(-1) + 4\cdot 4 = 17$$

同一行列式，按第1列展开也得到17。

教材：第1章 §5 行列式按行（列）展开，pp.16—19

上讲回顾：行列式的展开



$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

固定一行：元素 × 对应的代数余子式，再求和。

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

本讲先完成展开定理，再研究行列式与矩阵、方程组的联系。

展开定理：造零后展开



$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

先作 $r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1$，行列式的值不变。

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4$$

展开定理的特殊情况



$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$D = 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 4A_{23} = 16$$

这是展开定理的特殊情况：这一行的其他项全部消失。

证明一般定理时，先独立证明这一特殊情况。

展开引理的证明



目标：从n阶定义推出符号因子，而不预先使用展开定理。

把唯一可能非零的元素移到(1,1)，其余元素保持相对顺序。

$$(i-1)+(j-1)=i+j-2$$

此时每个非零项都必须取a_{ij}，其余选法正好组成M_{ij}。

$$D=(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

展开定理的证明：拆开一行



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

利用单行可加性，把第2行拆成$(0,-1,0)+(0,0,4)$。

其余各行保持相同；被省略的零项为0。

每一项只在第2行留一个非零元素，便可用刚才的引理。

展开定理的证明：一般情形



$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

$$= (a_{i1}, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, \cdots, 0, a_{in})$$

第一步：只拆第i行，得到n个行列式；其余行不变。

第二步：每个行列式用引理，得到$a_{ij}A_{ij}$。

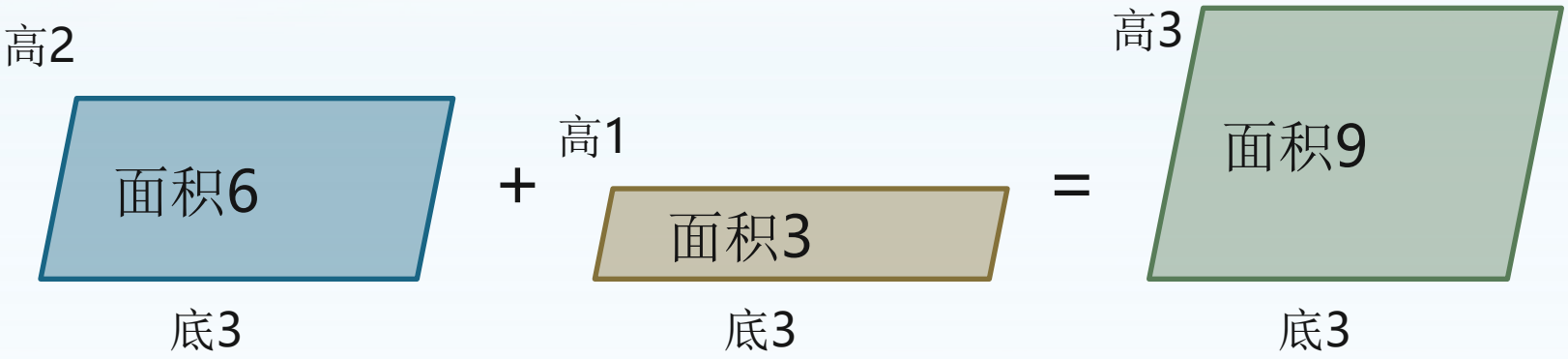
删去第i行后，余子式未被这次拆分改变。

$$D = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

行列式的可加性与面积



固定底边3；另一条边拆开，高也随之相加。



底不变，高相加，面积也相加。

对应单列可加性：第一列固定，只拆第二列。

这是展开的几何入口；一般展开的符号仍由刚才的定理保证。

坐标分解与有向面积



$$D=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5 \qquad (1,2)=(1,0)+(0,2)$$

固定斜边u，把另一边拆成水平、竖直分量；此时须带方向计面积。

$$\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1 \qquad \begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6$$

$$D=-1+6=5$$

负号记录方向；两个有向面积相加，得到原面积。

随堂选择题1：展开与负号



请打开学习通，完成本题。

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

按第2行展开，D 的值为：

A. -21　　B. 21　　C. -7　　D. 7

矩阵与行列式的计算规则



矩阵	行列式
转置后，矩阵通常改变	$\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\| = \|\boldsymbol{A}\|$
整矩阵数乘：每个元素都乘 k	$\|k\boldsymbol{A}\| = k^n\|\boldsymbol{A}\|$
矩阵加法：对应元素相加	$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$ 一般不成立

单行可加性：其余各行保持不变，才可以拆成和。

提纲



1 行列式的展开与结构计算

2 方阵行列式、伴随矩阵与可逆性

3 子式与矩阵的秩

4 克拉默法则与第三板块小结

教材：第1章§5；第2章§2五、§3一及例13、§4；第3章§2一。

1.1 范德蒙德行列式



$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{vmatrix}$$

观察：若两个参数相同，会出现什么？

目标：通过消元、提因子，把三阶降成二阶。

范德蒙德行列式：消元



$r_3 \leftarrow r_3 - x_1 r_2$，随后 $r_2 \leftarrow r_2 - x_1 r_1$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix}$$

从下向上操作：避免使用已经改变的上一行。

范德蒙德行列式：提因子与降阶



$$D_3 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

每两个参数贡献一个差：后列参数减前列参数。

教材：第1章 §5 行列式按行（列）展开，pp.18—20；例12

范德蒙德行列式：一般形式



$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$D_n = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

参数互不相同时非零；有重复参数时为零。

教材：第1章 §5 行列式按行（列）展开，pp.18—20；例12

范德蒙德行列式：递推依据



从第 n 行向上：后行减去前行的 x_1 倍。

$$r_k \leftarrow r_k - x_1 r_{k-1} \ \ (k = n, n-1, \ldots, 2)$$

第一列仅剩首项1；沿第一列展开，各列提因子。

$$D_n = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) D_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)$$

二阶成立 + 递推成立 ⇒ 一般公式成立。

1.2 跨行代数余子式之和



$$D = a_{j1}A_{j1} + \cdots + a_{jn}A_{jn}$$

把第 j 行替换为第 i 行，代数余子式保持不变。

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ \ (i \neq j)$$

理由：新行列式有两行相同。

余子式删去了第 j 行，所以不依赖第 j 行元素。

同行展开与跨行相乘



$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = |A| \ \ (i = j)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \ \ (i \neq j)$$

同一行：得到原行列式；不同行：得到零。

列也有完全对应的结论：固定两个列下标。

教材例13：代数余子式求和



$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=?$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=?$$

教材例13：行列式代换计算



$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -5\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix}=4$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -5\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$$

2.1 方阵乘积的行列式



$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

条件：A、B 为同阶方阵。

矩阵乘积对应连续变换；体积伸缩因子相乘。

$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$，但一般 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$

乘积公式的代数依据



$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$$

对同一个 2n 阶分块行列式，用两种方式消元。

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{E} & 0 \end{vmatrix}$$

块列：第二块列加第一块列右乘 B。

乘积公式：两种结果对齐



$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{E} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n^2}|-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{AB}|$$

交换两组各 n 列：共 n^2 次列交换。

2.2 伴随矩阵



$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

先求每个元素的代数余子式，再把这张表转置。

$$(\boldsymbol{A}^{*})_{ij}=A_{ji}$$

教材：第2章 §2 五、方阵的行列式，pp.37—38；例10

二阶伴随矩阵



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

代数余子式表：$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

容易漏掉的步骤：代数余子式表还要转置。

教材：第2章 §2 五、方阵的行列式，pp.37—38；例10；第2章§3例11

伴随恒等式



$$AA^* = A^*A = |A|E$$

对角位置：同行展开，得到 |A|。

非对角位置：跨行相乘，得到 0。

这正是前面“同行 / 跨行”两种求和的矩阵表达。

伴随恒等式：元素核对



$$(\boldsymbol{AA}^*)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

$$(\boldsymbol{AA}^*)_{ii}=|\boldsymbol{A}|,\ (\boldsymbol{AA}^*)_{ij}=0\ (i\neq j)$$

注意 A* 的第 j 列，来自原矩阵第 j 行的代数余子式。

按列的同类结论给出 A*A=|A|E。

2.3 可逆矩阵的行列式判据



$$\boldsymbol{A}\text{ 可逆} \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$$

奇异矩阵：|A|=0；非奇异矩阵：|A|≠0。

行列式把“能否恢复”压缩为一个数的判定。

教材：第2章 §3 一、逆矩阵的定义、性质和求法，pp.39—41；定理1、定理2

可逆判据：必要性与充分性



$$\boldsymbol{AA^{-1}} = \boldsymbol{E} \Rightarrow |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A^{-1}}| = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$$

必要性：用刚证明的乘积行列式公式。

$$|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\right) = \left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

充分性：把伴随恒等式两端除以非零的 |A|。

单侧逆与行列式



$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E} \Rightarrow |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$$

第一步：由 $|A|\neq 0$ 知 A 可逆，才可以在两边左乘 A^{-1}。

结合律化简得到 $B=A^{-1}$，因而 $BA=E$；限同阶方阵。

教材例11：二阶求逆公式



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |\boldsymbol{A}| = ad - bc \neq 0$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

先前记住的快捷规律，现在有了伴随恒等式的依据。

教材例12：三阶伴随法求逆



$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$|A|=2$$

流程：行列式 → 余子式表 → 代数余子式 → 转置。

可以计算；但阶数增大时，初等变换法通常更经济。

教材例12：余子式表与伴随矩阵



$$(M_{ij})=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ -6 & -6 & -2\\ -4 & -5 & -2\end{bmatrix} \qquad (A_{ij})=\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\\ 6 & -6 & 2\\ -4 & 5 & -2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

先按棋盘符号变号，再转置。

教材例12：结果与核对



$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$$

教材：第2章 §3 一、逆矩阵的定义、性质和求法，pp.39—41；例12

随堂选择题2：伴随矩阵



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix},\ |\boldsymbol{A}|=5$$

$\boldsymbol{A}.\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B}.\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{C}.\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

$D.\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

请打开学习通，选出 A 的伴随矩阵。

随堂选择题2：解析



$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

正确答案 B：代数余子式表必须转置。

A：漏转置；C：是逆矩阵；D：仍是原矩阵。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = 5\boldsymbol{E}$$

2.4 教材例13：矩阵方程



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$$

A^{-1} 已在前一例求出；怎样从两侧消去 A 和 B?

教材：第2章 §3 二、逆矩阵的初步应用，p.41；例13

教材例13：左右乘次序



$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

先求两个逆矩阵，再按次序计算 X。

教材：第2章 §3 二、逆矩阵的初步应用，p.41；例13

3.1 行列式与矩阵的秩



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

非方阵没有整体行列式：选 k 行、k 列，取交叉处的 k 阶行列式。

这些“子式”有的为零，有的不为零；最高能到几阶?

二阶子式：选择与计算



行1、3；列2、4：$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

行1、2；列1、2：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

非零二阶子式说明存在保留面积的二维方向；一个零子式不足以判秩。

子式的阶数与空间维度



k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个

最高非零子式是二阶：存在面积没有被压扁的二维方向。

$$0 \le r \le \min(m,n)$$

若所有三阶及更高阶子式都为零，则三维及更高维体积消失。

3.2 矩阵秩的子式定义



定义：矩阵 A 中最高阶非零子式的阶数，称为 A 的秩。

$$r(\boldsymbol{A}) = r$$

① 至少有一个 r 阶子式不为零。

② 所有高于 r 阶的子式都为零。零矩阵的秩规定为 0。

非零高阶子式必含非零低阶子式



$D_k \neq 0 \Rightarrow$ 至少一个 $(k-1)$ 阶子式非零

沿任意一行展开；若所有对应余子式为零，展开和也为零。

逐次降阶：非零子式的阶数不会“跳过中间”。

3.3 初等变换与最高非零子式



互换、非零倍乘、倍加都不改变最高非零子式的阶数。

互换：子式可能变号或转移位置。

非零倍乘：相关子式乘以非零数。

倍加：原子式变为两个同阶子式的线性组合。

倍加保秩：非零阶数为何保留



$r_i \leftarrow r_i + kr_j$

变换后任意 s 阶子式，都是原矩阵同阶子式的线性组合。

若原矩阵所有 s 阶子式为零，变换后也全为零。

再用逆操作 $r_i \leftarrow r_i - kr_j$，得到反向限制。

$r(\boldsymbol{B}) \le r(\boldsymbol{A})$ 且 $r(\boldsymbol{A}) \le r(\boldsymbol{B}) \Rightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$

转置与秩



$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A})$$

每个 k 阶子式，转置后仍有对应的 k 阶子式。

行列式转置不变，因此“非零”与阶数同时保留。

阶梯形与子式定义的对齐



$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

选择主元所在的行、列，得到二阶三角子式。

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

阶梯形矩阵的秩



若阶梯形有 r 个非零行：

① 主元所在的 r 行、r 列，组成非零三角子式。

② 任意高于 r 阶的子式都含零行，因此为零。

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\text{阶梯形}) = \text{非零行数}$$

满秩、行列式与可逆性



$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵

$$r(\boldsymbol{A}) = n \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \text{ 可逆}$$

n 阶子式只有一个：整个矩阵的行列式。

非方阵仍可谈秩；这里的行列式和可逆判据限于方阵。

秩的计算：子式与消元互证



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1$；$r_2 \leftrightarrow r_3$

非零二阶子式：$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1$

4.1 克拉默法则的适用范围



$\boldsymbol{Ax} = b$，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$D = |\boldsymbol{A}| \neq 0$

$$x_j = D_j/D \quad (j = 1, \ldots, n)$$

D_j：只把 A 的第 j 列替换为右端列 b 后的行列式。

方程个数 = 未知数个数；系数行列式非零。

列替换：保持其余各列



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

求哪个未知数，就替换同序号的列；不是替换一行。

$$x_2 = D_2/D$$

克拉默法则：从逆矩阵推导



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{D}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{b}$$

$$x_j = \frac{\mathrm{A_{1j}b_1} + \cdots + \mathrm{A_{nj}b_n}}{D}$$

分子正是：把第 j 列换为 b 后，沿第 j 列展开。

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

旧例回扣：二元方程组



$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

第8讲：面积伸缩因子为5，变换没有压扁平面。

现在：用列替换直接计算每个未知数。

二元旧例：共同分母



$$D=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5$$

$$D_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=10 \qquad D_2=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}=5$$

$$x=\frac{10}{5}=2,\quad y=\frac{5}{5}=1$$

列替换的几何解释



$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2$$

$$\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2) = x_1\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$$

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) = x_2\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$$

另一项含重复列而为0；因此同一个 D 成为公共分母。

教材例16：三元方程组



$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$D = 3 \neq 0$：存在唯一解

教材例16：克拉默法与逆法



$D_1 = 15,\ D_2 = 0,\ D_3 = 9$

$x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$

$\boldsymbol{x = A^{-1}b}$

列替换公式与逆法给出同一解；消元通常更适合实际计算。

4.2 克拉默法则的边界



$D = 0$：克拉默除法不能使用

不能因此断言“无解”；还可能有无穷多解。

回到统一流程：比较系数矩阵与增广矩阵的秩。

$r(\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$，再看是否等于未知数个数 n

齐次方程组的行列式判据



$\boldsymbol{Ax}=0$，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵

存在非零解 $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}|=0$

理由：有非零解 ⇔ r(A)<n ⇔ n 阶行列式为零。

这里同时保留了：齐次、方阵两个条件。

随堂选择题3：零行列式与判解



$$\begin{cases} ① \ x+2y=3 \\ \quad 2x+4y=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} ② \ x+2y=3 \\ \quad 2x+4y=7 \end{cases}$$

A. ①无解，②无解

B. ①无穷多解，②无穷多解

C. ①无穷多解，②无解

D. ①无解，②无穷多解

请打开学习通，完成本题。

随堂选择题3：解析



②$-2\times$①：第一组得到$0=0$；第二组得到$0=1$

正确答案 C：同一个系数矩阵，两种相容性。

第一组：$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=1<2$

第二组：$r(\boldsymbol{A})=1<r(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=2$

第三板块小结：一个数与多种表述



$|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = n$

$\Leftrightarrow$ 对每个 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 都有唯一解

代数：乘积、展开、伴随矩阵与克拉默公式。

几何：有向面积 / 体积的伸缩，零意味着降维。

计算方法与对象的区分



求秩、解一般方程组：优先消元，追踪主元与相容性。

计算行列式：行列都可操作，追踪交换变号与倍乘因子。

求逆：初等变换法常更省算；伴随法提供结构公式。

克拉默：条件明确、理论紧凑；高阶逐个计算通常费力。

学习检查



- □ 能解释伴随矩阵为什么要转置。
- □ 能把非零行列式、满秩和可逆对应起来。
- □ 能区分一个零子式与所有高阶子式为零。
- □ 能说明克拉默法则的条件与零行列式的边界。

第三板块完成



Section 3 is Completed!

行列式：一个数连接代数与几何

展开 · 乘积 · 可逆 · 秩 · 方程 · 几何

接下来：前三章综合，再进入向量组。

Congrats!





Section 3 is Completed~