广西民族大学
GUANGXI MINZU UNIVERSITY



线性代数
Linear Algebra

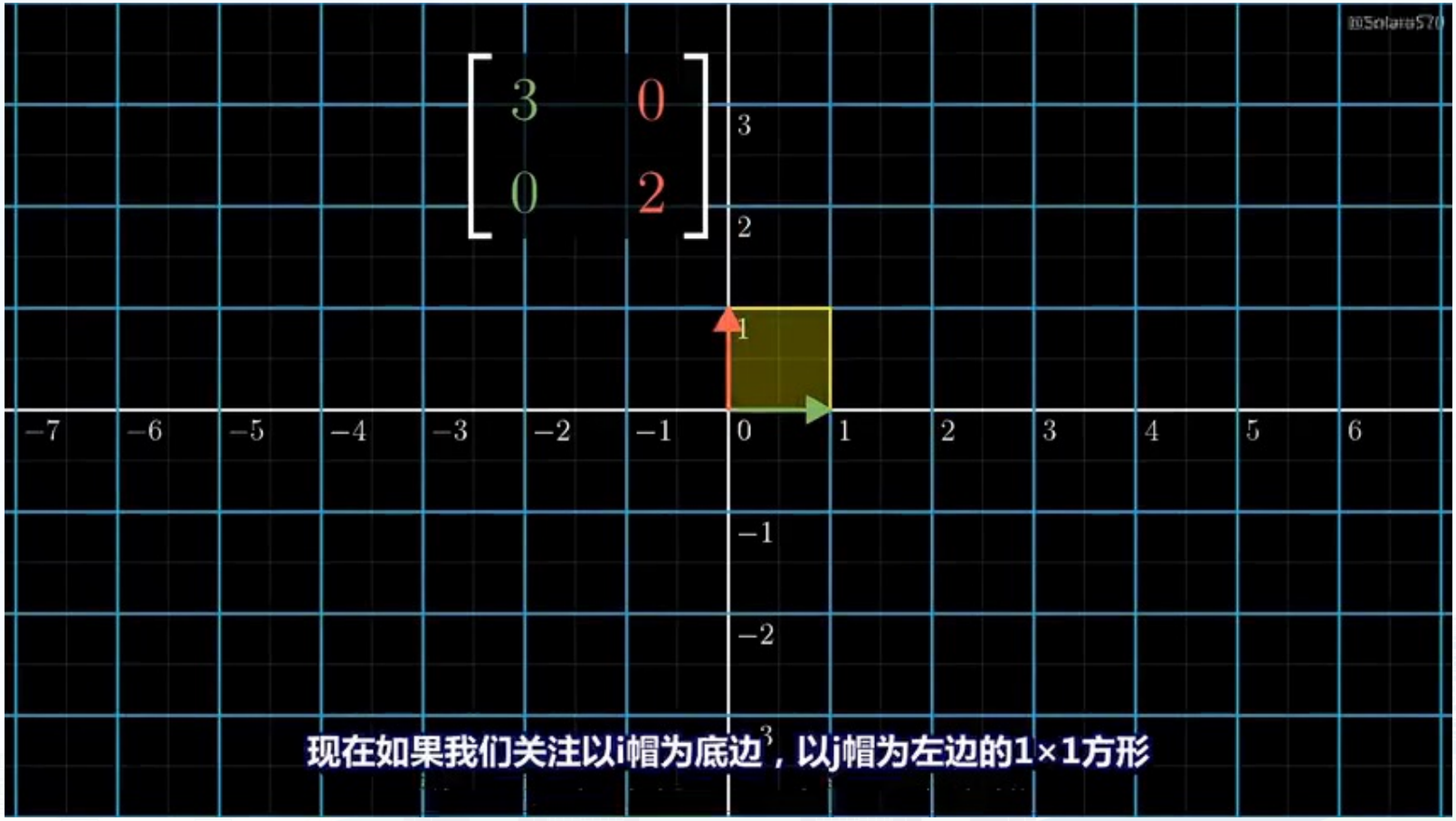
第九讲 · 行列式的性质与展开

人工智能学院 · 26计科03班、04班

主讲：郭泉

视频：行列式的几何意义





3Blue1Brown《线性代数的本质》· 行列式

上讲回顾：二阶与三阶行列式



二阶：主对角线乘积减去副对角线乘积。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

三阶：对角线法则，三个正项减去三个负项。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

二阶有2项，三阶有6项；每项都从不同行、不同列取数。

回顾：第1章 §1 二阶与三阶行列式，pp.1–3

四阶及以上行列式的计算



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = ?$$

每一项怎样选取元素?

每一项的正、负号怎样确定?

上讲回顾：排列与奇偶性



排列：把1，2，…，n这n个数排成一列。

逆序：前面的数比后面的数大；逆序数记为 t。

$$32514：\ t = 2 + 1 + 2 + 0 + 0 = 5$$

逆序数为奇数 → 奇排列；为偶数 → 偶排列。

接下来：对换怎样改变奇偶性？它怎样决定各项的符号？

回顾：第1章 §2 一、排列及其逆序数，pp.4–5

提纲



1 对换与 n 阶行列式

§2 二、对换；§3 n阶行列式的定义

2 行列式的性质

§4 性质1—5及推论

3 性质计算与结构例题

§4 教材例7—11

4 按行（列）展开

§5 余子式、引理、展开定理与计算

1.1 逆序数的计算与核对



$$t(312546) = 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3$$

$$t(7654321) = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

也可数每个元素右侧更小的数，结果相同。

只选一种方向完成一次计数，再用另一种方向核对。

1.1 对换与相邻对换



对换：交换两个元素的位置，其余位置不动。

$1\ 2\ 3\ 4\ 5 \rightarrow 1\ 5\ 3\ 4\ 2$

相邻对换：交换两个相邻的元素。

$1\ 2\ 3\ 4\ 5 \rightarrow 1\ 3\ 2\ 4\ 5$

1.1 对换与排列奇偶性：定理1



定理：任意两个元素对换，排列改变奇偶性。

相邻对换：只有这一对的先后次序改变。

逆序数改变 $+1$ 或 -1

非相邻对换，可分解成奇数次相邻对换。

定理1：一般对换的证明



$$\ldots\ a\ b_1 \cdots b_m\ b\ \ldots\ \rightarrow\ \ldots\ b\ b_1 \cdots b_m\ a\ \ldots$$

先将右端b向左移动m+1步，再将a向右移动m步。

$$(m+1)+m=2m+1$$

奇数次改变奇偶性，最终奇偶性相反。

标准排列与对换次数



推论：奇排列变成标准排列，需要奇数次对换；

偶排列变成标准排列，需要偶数次对换。

同一个排列可以有不同的对换过程，次数的奇偶性不变。

当n≥2时，奇排列与偶排列的个数相等。

1.2 n阶行列式的定义



选取规则：每行一个、每列一个。

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

行标按自然次序，列标构成1到n的一个排列。

按这个列标排列的奇偶性，确定该项的正负。

1.2 定义2：n阶行列式



$$D=\sum_{p\in S_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

求和遍历1到n的全部排列，共n!项。

t是列标排列的逆序数；每项取不同行、不同列的元素。

$$D=det\,\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|$$

矩阵与行列式的区别



$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2$$

矩阵：可以是m×n。

行列式：这里只对方阵定义。

$|-3|=-3$；标量绝对值$|-3|=3$

1.2 乘积项的选取与符号



$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

$t(4321) = 6,\quad (-1)^6 = 1$

$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$：$t(3142) = 3$

若同一行或同一列取了两次，就不是定义中的一项。

按列标顺序表示行列式



$$D = \sum_{p \in S_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

固定列标1、2、…、n，行标遍历所有排列。

同一个乘积项，改按列的顺序排列因子。

这为“转置不改变行列式”提供代数依据。

按列重排：同一项的两种标记



$$a_{12}a_{23}a_{31} = a_{31}a_{12}a_{23}$$

按行看：列标231，逆序数2。

按列看：行标312，逆序数2。

两者是互逆排列，逆序数相同，因而符号相同。

1.3 教材例5的特例：三角行列式



$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 3 = -6$$

下三角：第一行只能选第1列，再依次选下一列。

上三角、下三角和对角行列式，均等于主对角线之积。

1.3 教材例6：反三角行列式



$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & s \\ \lambda_3 & t & u \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{n(n-1)/2}\, a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

反序排列的逆序数：1+2+…+(n−1)。

随堂选择题 1：定义与符号



请打开学习通，完成本题。

四阶行列式展开中，下列哪一项应冠负号？

A. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

B. $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

C. $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$

D. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$

第1章 §3：n阶行列式的定义，pp.6–7

2 行列式的性质



按定义计算，n阶行列式含n!个乘积项。

已有工具：初等变换，把复杂矩阵化成阶梯形。

现在追踪：这些操作会使行列式怎样变化?

性质帮助计算；几何帮助理解；定义保证依据。

2.1 性质1：转置不变



$$|A^{\mathrm{T}}| = |A|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

行与列具有同等地位：对行成立的性质，对列也成立。

2.2 性质2：互换两行变号



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

交换任意两行或两列，行列式变号。

代数：相应排列奇偶性改变。几何：有序边的方向反转。

性质2的推论：两行相同



若两行或两列完全相同，行列式为零。

$$D = -D \Rightarrow 2D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2.3 性质3：一行数乘



$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

一行或一列的全部元素乘k，行列式也乘k。

只从一行提出一个公因子，不能按元素个数反复提出。

整矩阵数乘与一行数乘



$$|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}| \quad （\boldsymbol{A}为n阶）$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|2\boldsymbol{A}| = 4, \quad 2|\boldsymbol{A}| = 2$$

性质3的推论：成比例与零行



两行或两列成比例，行列式为零。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

有一行或一列全为零，行列式也为零。

2.4 性质4：一行拆分



$$\begin{vmatrix} a+u & b+v \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v \\ c & d \end{vmatrix}$$

只拆这一行，其余各行保持不变。

整矩阵相加的反例



$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = |2\boldsymbol{E}| = 4$$

$$|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 2$$

一般情况下，|A+B|≠|A|+|B|。

2.5 性质5：倍加不变



把一行的k倍加到另一行，行列式不变。

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$$

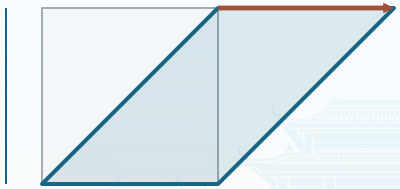
$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = D$$

倍加变换与面积



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在一个方向上剪切，底和高不变，面积不变。



列2 ← 列2 + 列1

倍加是整行或整列的操作，不能只改某一个元素。

三种初等变换与行列式



交换两行（列）	行列式变号
一行（列）乘k	行列式乘k
一行倍加到另一行	行列式不变

矩阵用“~”记录等价；行列式用“=”并追踪符号与倍数。

矩阵等价与行列式的值



$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B},\ |\boldsymbol{E}|=1,\ |\boldsymbol{B}|=2$$

初等变换保持矩阵的秩，不一定保持行列式的值。

倍加保持值；交换变号；一行数乘要记录倍数。

离线互动：交换、数乘、倍加怎样改变面积？

随堂选择题 2：变换与倍数



请打开学习通，完成本题。

三阶矩阵A满足$|A|=2$。依次执行：

交换第1、2行；第3行乘3；第2行加第1行的2倍。

所得矩阵B的行列式是：

A. -6　　B. 6　　C. -18　　D. 18

3 行列式的计算



3.1 化为三角形

教材例7：选择主元，记录交换与倍加。

3.2 利用结构

教材例8—11：等行和、差分、分块三角、重复结构。

观察结构，选取操作，再核对符号与倍数。

连续变换的记号与顺序



变换记号放在等号上方，说明这两个行列式怎样相等。

$$r_1 \leftarrow r_1 + r_2$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}$$

这是整行倍加：第二行不动，行列式的值不变。

连续变换：数值核对



第一步：用第2行更新第1行。

$$r_1 \leftarrow r_1 + r_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad = \qquad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

两边行列式均为−2；记号对应等号两边的整行变化。

连续变换：第二步



第二步：使用已经更新的第1行。

$$r_2 \leftarrow r_2 - r_1$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

D=4×(−2)−6×(−1)=−2；不能减去旧的第1行。

3.1 教材例7：消元目标



$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

目标：化为上三角形，再把主对角线元素相乘。

沿用高斯消元的“选主元—消去下方元素”；另记符号、倍数。

教材例7：列交换与行消元



$c_1 \leftrightarrow c_2;\ r_2 \leftarrow r_2 - r_1;\ r_4 \leftarrow r_4 + 5r_1$

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

可按整行或整列操作；这里先换列，找到1作主元。

教材例7：化为上三角形



$r_2 \leftrightarrow r_3;\ r_3 \leftarrow r_3 + 4r_2;\ r_4 \leftarrow r_4 - 8r_2$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

一次行交换与先前列交换的两个负号相抵。

教材例7：上三角形与求值



$$r_4 \leftarrow r_4 + (\frac{5}{4})r_3$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$D = 1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot (\frac{5}{2}) = 40$$

3.2 教材例8：等行和结构



$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

每一列的四个数之和都是6。能否制造一行相同元素?

教材例8：制造相同的一行



$$r_1 \leftarrow r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

三个倍加依次进行；其余三行未更新，行列式不变。

教材例8：提取因子与消元



r_1提取公因子6；再作 $r_i \leftarrow r_i - r_1$（$i = 2,3,4$）

$$D = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$$

3.2 教材例9：差分结构



$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

从下往上，依次“后行减前行”。

3.2 教材例9：第一轮差分



$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$r_4 \leftarrow r_4 - r_3$，$r_3 \leftarrow r_3 - r_2$，$r_2 \leftarrow r_2 - r_1$

从下往上做，减去的都是这一轮尚未更新的原行。

3.2 教材例9：第二轮差分



$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$r_4 \leftarrow r_4 - r_3$，$r_3 \leftarrow r_3 - r_2$

第二列下面造出零，最后再用第3行消去第4行。

教材例9：差分消元的终点



$$r_4 \leftarrow r_4 - r_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

仍是普通消元的倍加变换；利用相邻行结构，免去除法。

$$D = a^4$$

3.2 教材例10：分块三角行列式



$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$$

A、B必须是方阵；C可以不是方阵。

教材例10：零块限制了取数位置



$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ p & q & e & f \\ r & s & g & h \end{vmatrix}$$

前两行若从第3、4列取数，该项就是零。

非零项的前两行只能占第1、2列；后两行只能占第3、4列。

教材例10：两组取数与符号相乘



每一个非零项，都由A的一项与B的一项相乘得到。

前组列标全部小于后组列标，组间没有新增逆序。

$$(-1)^{t}=(-1)^{t_1}(-1)^{t_2}$$

$$|M|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$$

把所有允许的前组与后组配对求和，正好是两个行列式的乘积。

分块对角公式与反例



分块对角公式：|diag(A,B)|=|A|·|B|，其中A、B为方阵。

若零块条件不满足：

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

若只乘“大对角块”，得到1×4=4，与真实值不同。

教材例11：重复的二阶结构



$$D_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

把第1行与第6行、第2行与第5行、第3行与第4行分别排在一起。

同时按相同顺序排列各列；每对显出一个二阶结构。

教材例11：四阶缩小版的行列重排



原四阶矩阵（重排前）：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

按 1、4、2、3 重排行与列，得到下式。

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$$

行重排与列重排的变号相同，相乘为正；原值保持。

教材例11：一般二阶结构的乘积



2n阶：行和列都按 1，2n，2，2n−1，…，n，n+1 重排。

得到n个相同的二阶对角块，其他块都是零。

$$D_{2n} = (ad - bc)^n$$

行重排乘一个符号，列重排再乘同一个符号；两次符号相抵。

4 行列式按行（列）展开



4.1 余子式与代数余子式

4.2 展开定理与计算

4.3 展开定理的证明

4.4 单列可加性与有向面积

4.1 三阶行列式的分组计算



$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$D = 0 \cdot (-10) + (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 4$$

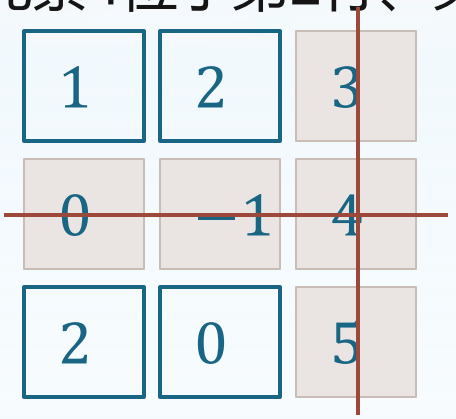
把六项按第2行选中的元素分成三组。

每组还剩一个二阶行列式，并有相应的位置符号。

4.1 余子式：删除所在行与列



元素4位于第2行、第3列。



$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

删除第2行、第3列；蓝框中的四个元素组成二阶行列式。

余子式只保留剩余元素，不再保留原来的行、列编号。

4.1 余子式：第二个位置



再取第1行、第2列的元素2。

1	2	3
0	−1	4
2	0	5

$$M_{12}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-8$$

删除第1行、第2列；按原有先后顺序保留其余行、列。

同一个行列式中，不同位置对应不同的余子式。

4.1 代数余子式：增加位置符号



$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

比余子式多乘一个位置符号：由行号与列号之和决定。

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -(-4) = 4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-8) = 8$$

位置符号、余子式数值的正负、原元素的正负，分别处理。

4.1 位置符号



$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

行号+列号为偶数：乘+1。

行号+列号为奇数：乘−1。

符号表只决定位置符号，不决定代数余子式最终是正还是负。

4.2 按行（列）展开定理



固定一行：元素乘它自己的代数余子式，再求和。

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

固定一列，也得到同一个行列式的值。

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

先看三阶算例，再说明这个规则为什么成立。

4.2 三阶行列式按第2行展开



$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

$$A_{22}=M_{22}=5-6=-1$$

$$A_{23}=4$$

$$D=0\cdot A_{21}+(-1)A_{22}+4A_{23}$$

$$=(-1)(-1)+4\cdot 4=17$$

先算代数余子式，再乘本行的元素。

4.2 同一行列式按第1列展开



$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 2 & 0 & 5\end{vmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}=11$$

$$D=1\cdot(-5)+0\cdot A_{21}+2\cdot 11=17$$

行、列可以任选；零多的一行或一列通常更省计算。